

*Wol*  
**Č S A V**

**ING. RICHARD A. BAREŠ CSc.**

**ANALYSA TVAROVĚ ORTOTROPNÍCH  
KONSTRUKCÍ METODOU  
BEZROZMĚRNÝCH SOUČINITELŮ**

**AUTOREFERÁT  
DOKTORSKÉ DISERTAČNÍ PRÁCE**

Československá akademie věd  
Ústav teoretické a aplikované  
mechaniky

Ing. Richard A. B a r e š, CSc.

ANALYSA TVAROVĚ ORTOTROPNÍCH KONSTRUKCÍ  
METODOU BEZROZMĚRNÝCH SOUČINITELŮ

Číslo vědního oboru : 39 - 01 - 9  
Mechanika tuhých a poddajných  
těles a prostředí

autoreferát k získání vědecké hodnosti  
doktora technických věd

V Praze dne 26. května 1976

Disertační práce byla vypracována při plnění  
vědeckého úkolu III-6-3/1 na ČSAV - Ústavu teoretické  
a aplikované mechaniky.

Disertant : Ing. Richard A. Bareš, CSc.  
ČSAV - Ústav teoretické a aplikované  
mechaniky  
Vršehradská 49

128 49 PRAHA 2

Oponenti Prof. Ing. V. Dvořák CSc.  
Prof. Ing. L. Janda DrSc.  
Prof. Ing. V. Křupka DrSc., člen koresp.  
Prof. Dr. Ing. A. Tesár DrSc., člen koresp.

Stanovisko k disertaci vypracoval Ústav teoretické  
a aplikované mechaniky ČSAV.

Autoreferát byl rozeslán dne : 2. 11. 87

Obhajoba disertace se koná dne 18. 12. 87 před komisí  
pro obhajoby doktorských prací v oboru 39-01-9  
mechanika tuhých a poddajných těles a prostředí v  
Ústavu teoretické a aplikované mechaniky v 9, 30 hod.

S disertací je možno se seznámit v Ústavu teoretické  
a aplikované mechaniky v Praze.

Ing. Ladislav Půst, DrSc.,  
člen korespondent ČSAV,  
předseda komise pro obhajoby  
doktorských prací v oboru  
39-01-9

**1. Současný stav problematiky, která je předmětem  
disertace s přehledem literatury, jež se zabývá  
zkoumanými otázkami.**

---

V technické praxi jsou tvarově ortotropní konstrukce natolik obvyklé, že se můžeme vyhnout definicím a považovat za jejich představitele např. roštový systém, složený z trámů, příčníků a desky, dobře známý v mostních konstrukcích.

Vzhledem k vysokému stupni statické neurčitosti je z hlediska statického výpočtu již u poměrně jednoduchých typů těchto konstrukcí skutečné rozdělení napětí od vnějšího zatížení problémem. Počet neznámých složek, které musí být určeny, je obvykle značný, což silně komplikuje numerické operace a analytický výpočet se stává neúměrně složitý.

Výpočet roštových systémů byl obvykle založen na principech přetvárné práce, ale "klasická řešení" obdržená touto cestou se často nehodila pro svou obtížnost k praktickému upotřebení. Proto vznikly různé přibližné metody, které sice zjednodušovaly výpočet, ale podstatně snižovaly přesnost výsledků. Aplikace jak klasických, tak přibližných řešení se tím zúžila na omezenou oblast problémů.

Během posledních dvou desetiletí došlo v konstrukčních výpočtech k podstatné změně pojetí roštových systémů. Stalo se běžnou praxí předpokládat, že roštový systém může - pro účely výpočtu - být adekvátně reprezentován náhradnou "ekvivalentní" ortotropní deskou. Vzhledem k tomu, že teorie ortotropních desek je již dokonale propracována, jsou výhody tohoto pojetí zřejmé:

pouze namísto materiálové ortotropie nastupuje ortotropie tvarová. Platnost postupu byla všestranně prokázána a to nejen srovnávacími analytickými výpočty, ale především experimentálními studii na modelech i skutečných konstrukcích /1,2,7/.

Z mnoha uveřejněných postupů řešení deskové rovnice ukázal se nejvhodnější postup založený na principu příčného roznášení zatížení, který autor společně s prof. Massonnetem v minulosti propracoval od obecné teorie až k možnosti praktického použití /7/.

Ve všech dosavadních teoriích se předpokládá součinitel příčné kontrakce všech částí konstrukce nulový. Přechod od skutečné k ekvivalentní desce vycházel z klasických vztahů pro tuhosti jednotlivých oddělených elementů. Výpočet i za těchto zjednodušujících předpokladů byl nepřehledný, složitý a bez pomoci počítačů prakticky nezvládnutelný.

Zůstaly dva problémy: jak provést řešení příslušné parciální diferenciální rovnice, popisující plně daný systém, aby bylo výstižnější a přitom prakticky široce použitelné a jak zajistit správný přechod ze skutečné konstrukce na ekvivalentní ortotropní desku a naopak.

#### Přehled literatury :

##### V. Dašek :

Řešení trémových roštů metodou harmonického zatížení, Praha, 1953.

Systematicky zpracovává výpočet roštů jako prutového systému s využitím součinitelů příčného roznášení ve smyslu pojetí Leonhardta (1938) a Faltuse (1949).

W. Cernelius :

Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonal-anisotropen Platte. Stahlbau 21, 1952. str. 21-24, 43-48, 60-63.

Podává ucelené řešení Huberovy rovnice aplikované pro mostní typ ortotropní desky ve tvaru složitých řad.

Y. Guyon :

Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisées par des entretoises. Ann. des Ponts et Chaussées de France, 1946, č. 9, 10, str. 553-612.

Podává řešení Huberovy rovnice pomocí součinitelů příčného roznášení za předpokladu, že tuhost kroucení i kontrakce jsou nulové.

Ch. Massonnet :

Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion. Memoires A.I.P.C. 10, 1950, str. 147-182.

Obsahuje rozpracování Guyonovy metody, dbá-li se tuhosti kroucení konstrukce.

R. Baresš :

Výpočet roštů s uvažováním kroucení, SNTL, Praha 1963.

Synthesa dosavadních příspěvků s vlastními poznatky, vedoucí ke zobecněné metodě výpočtu trámových roštů a ortotropních desek pomocí roznášecích součinitelů při nulové kontrakci.

R. Bareš, Ch. Massonnet :

Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon le méthode Guyon-Massonnet-Bareš, Dunod, Paris, 1966.

Přepracováním a rozšířením předchozích prací autorů vznikla úplná metoda výpočtu konstrukcí tohoto typu na základě součinitelů příčného roznášení za předpokladu nulové kontrakce a s použitím klasického přechodu mezi skutečnou a ekvivalentní deskou.

2. Cíl disertační práce

Cílem disertační práce je odvození komplexní a uzavřené teorie pro analýzu plošných tvarově ortotropních konstrukcí mostního typu s důsledným zahrnutím vlivu příčné kontrakce materiálů, z nichž je konstrukce zhotovena. Metoda výpočtu má umožnit jak přesné řešení problému s využitím samočinných počítačů, tak přibližné řešení (s volitelným stupněm přesnosti) se zachováním dostatečně jednoduchého a inženýry - konstruktéry v přijatelném čase zvládnutelného početního postupu.

Řešení je třeba provést takovým způsobem, aby většina numerických výpočtů mohla být provedena předem k umožnění tabulace dílčích výsledků v závislosti na charakteristikách analysované konstrukce.

Je třeba stanovit přesnost, ve které jsou výsledné veličiny, rozhodně pro návrh konstrukce získány, objasnit vliv jednotlivých předpokladů na velikost vzniklých chyb a definovat rozsah použitelnosti metody. Pomocí odvozené metody pak podrobně analyzovat vliv příčné kontrakce a stanovit chyby při jejím nedbání v různých fázích výpočtu.

Dále je třeba určit postup a podmínky výstižného přechodu od skutečné plošné konstrukce k ekvivalentní desce.

### 3. Zvolená metoda řešení

Nejprve je v práci věnována pozornost metodice výpočtu ekvivalentní ortotropní desky /9, 11, 17/, jež je definována znamou rovnicí

$$Q_T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + Q_P \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (1)$$

$Q_T, Q_P$  jsou zde jednotkové ohybové tuhosti ekvivalentní desky

$2H$  člen, vyjadřující torsní tuhost ekvivalentní desky, jehož hodnota se může měnit od 0 v případě nulové torsní tuhosti a nulové příčné kontrakce do maxima u plně (materiálově ortotropní nebo isotropní) desky.

K usnadnění řešení byly zavedeny tři bezrozměrné parametry, vyjadřující veškeré materiálové i průřezové vlastnosti vyšetřované konstrukce s omezeními, danými obvyklými předpoklady při řešení tenkých desek s malým průhybem (Poisson-Kirchhoffova teorie):

- pro poměrnou příčnou ohebnost konstrukce Guyonův parametr příčného ztužení

$$\nu^3 = \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{Q_T}{Q_P}}$$

jsou-li  $2b$  šířka a  $l$  rozpětí konstrukce

- pro kontrakční schopnost konstrukce parametr kontrakční schopnosti

$$\eta = \nu_T \sqrt{\frac{Q_P}{Q_T}}$$



kde  $\nu_T$  je součinitel příčné kontrakce ekvivalentní desky v podélném směru

- pro poměrnou torsní tuhost (analogicky k Massonnetovi)  
parametr tuhosti v kroucení

$$\alpha = \frac{\mathcal{J}_T + \mathcal{J}_p}{2(1-\nu_T)\sqrt{Q_T Q_p}}$$

kde  $\mathcal{J}_T$  a  $\mathcal{J}_p$  jsou torsní tuhosti ekvivalentní desky v obou směrech.

Protože střední člen rov.1 má hodnotu

$$2H = (Q_T \nu_p + Q_p \nu_T) + (\mathcal{J}_T + \mathcal{J}_p) \quad (1a)$$

lze po zavedení parametrů  $\alpha$  a  $\eta$  a za přijatelného předpokladu  $Q_T \nu_p = Q_p \nu_T$  po úpravě psát, že

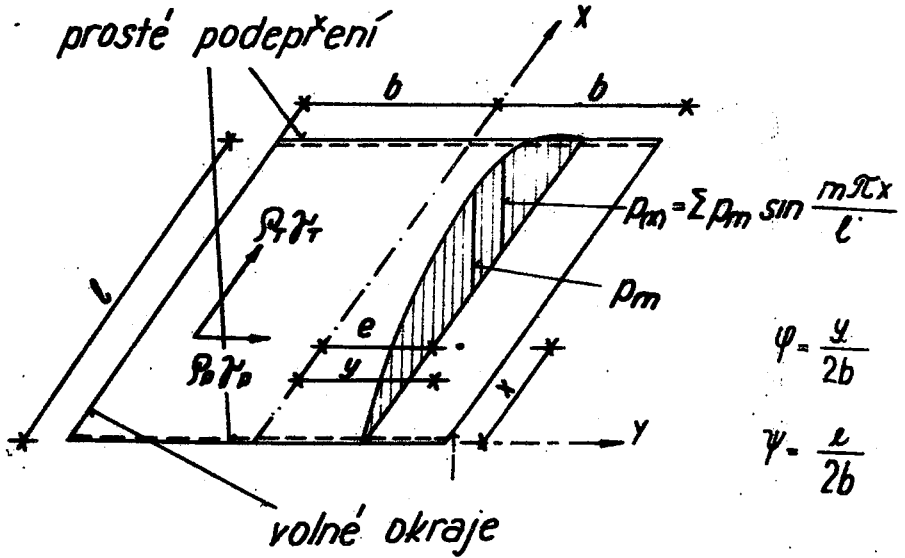
$$2H = 2\sqrt{Q_T Q_p} [\eta + \alpha(1-\eta)] = 2E\sqrt{Q_T Q_p}$$

Při řešení bylo nejprve předpokládáno, že zatížení je přímkové, že působí ve vzdálenosti  $l$  od podélné osy konstrukce (obr.1) a je rozloženo sinusoidálně ve směru rozpětí, tj. zatížení je definováno jako

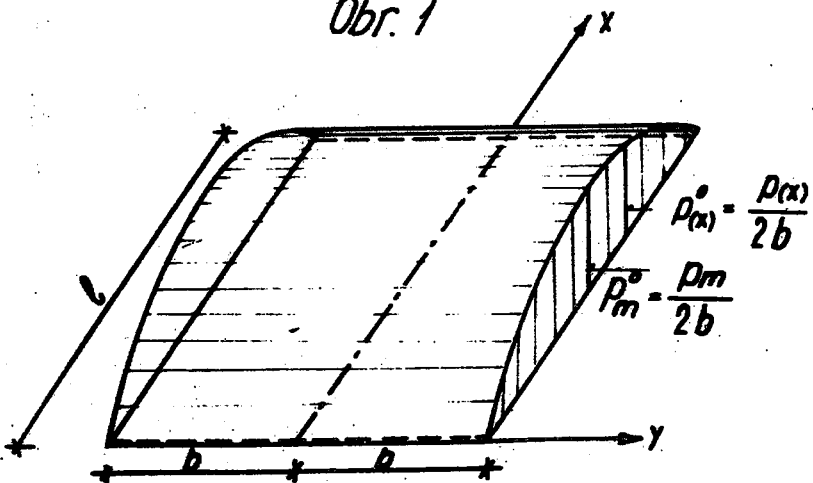
$$p_x = \sum P_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (2)$$

kde  $P_m$  je amplituda  $m$ -tého členu rozvoje zatížení ve tvaru jednoduché Fourierovy řady. Nečiní potíží převést každé obecné zatížení do harmonického tvaru rozvojem do Fourierovy řady.

Pro použitou souřadnou soustavu je vhodné užít antimetrický (lichý) tvar vzhledem k  $x=0$ , což je sinová řada, pro níž  $p(-x) = -p(x)$ .



Obr. 1



Obr. 2

Např. pro osamělé břemeno  $P$  působící ve vzdálenosti  $x = d$  vychází příslušný zatěžovací člen rovnice (1) ve tvaru

$$p_x = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin \frac{m\pi x}{l} = \frac{2P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Jak již bylo řečeno, je analysován tzv. mostní typ konstrukce s prostým podepřením podél stran  $x = 0$  a  $x = l$  a volný podél zbývajících dvou stran  $y = \pm b$ .

Řešení homogenního tvaru rovnice (1) je předpokládáno podle M. Lévyho ve tvaru

$${}^2W = \sum_{m=1}^{\infty} W_{m(y)} \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad (3)$$

pro partikulární řešení je uvažován pás nekonečně široký; pro přímkové zatížení podle (2) získáme obdobně

$${}^1W = \sum_{m=1}^{\infty} {}^1W_{m(y)} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (4)$$

Úplné řešení ekvivalentní desky, jež je dáno součtem  ${}^1W + {}^2W$ , vychází po řadě operací ve tvaru

$$w(x,y) = \sum \frac{P_m l^4}{2bm^4 \pi^3 \varrho_T} k(y)_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (5)$$

kde  $k(y)_m$  je prvý bezrozměrný součinitel; je poměrně komplikovanou hyperboliko-goniometrickou funkcí bezrozměrných parametrů  $\vartheta$ ,  $\alpha$  a  $\eta$  a dále bezrozměrného parametru  $\varphi = y/2b$ , udávajícího polohu vyšetřovaného místa v příčném směru a  $\psi = \ell/2b$ , udávajícího polohu přímkového zatížení.

S ohledem na to, že ve Fourierově rozvoji funkce  $K(y)$   $m$ -tý člen pro  $\nu^3$  je přesně roven prvému členu pro  $m\nu^3$ , stačí pro určení  $w(x,y)$  stanovit tento bezrozměrný součinitel, bez ohledu na druh zatížení, pouze v závislosti na bezrozměrných parametrech  $\nu^3$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  a  $\psi$  (tj. pro  $m = 1$ ).

Ohybové momenty ve směru rozpětí vychází podle známého vztahu

$$M_T = -Q_T \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_p \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

ve tvaru

$$M_T = \sum \frac{P_m l}{2b\pi m^2} \left\{ K(y)_m + \eta \mathcal{U}(y)_m \right\} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (6)$$

Obdobně ohybové momenty v příčném směru podle vztahu

$$M_p = -Q_p \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

jsou dány výrazem

$$M_p = \sum \frac{P_m b}{2\nu^3 m^2 \pi} \left[ \eta K(y)_m + \mathcal{U}(y)_m \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (7)$$

V obou výrazech (6) a (7) je  $\mathcal{U}(y)_m$  druhý bezrozměrný součinitel, závislý na  $\nu^3$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  a  $\psi$ . Pokud jde o závislost na  $m$ , platí totéž, co bylo řečeno již o  $K$ , tj. že

$$\mathcal{U}(y)_m \left[ f(m\nu^3) \right] \equiv \mathcal{U}(y)_m \left[ f(\nu^3) \right].$$

Krouticí momenty jsou vyjádřeny jako

$$M_{Tp} = \partial_T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$M_{PT} = -\gamma_p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} ;$$

na rozdíl od materiálové ortotropní desky nejsou u ekvivalentní tvarově ortotropní desky krouťicí momenty v obou směrech rovné, tedy

$$M_{TP} \neq M_{PT}$$

Pro rozdíl krouťících momentů pak platí

$$(M_{TP} - M_{PT}) = \sum \alpha (1 - \eta) \frac{\rho m l}{2\pi c m} [\mathcal{T}(y)_m] \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad (8)$$

kde  $\mathcal{T}(y)_m$  je třetí bezrozměrný součinitel, závislý na  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  a  $\psi$ .

Posouvající síly ve směru rozpětí, vyjádřené jako

$$Q_T = -Q_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (Q_T \nu_p + \gamma_p) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

vychází ve tvaru

$$Q_T = \sum \frac{\rho m l}{2bm} \left\{ K(y)_m + \left( \frac{\gamma_p}{\sqrt{Q_T Q_p}} + \eta \right) \mathcal{U}(y)_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad (9)$$

a podobně pro reakci, jež je vyjádřena vztahem

$$\bar{Q}_T = -Q_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (Q_T \nu_p + \gamma_T + \gamma_p) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

platí

$$\bar{Q}_T = \sum \frac{\rho m l}{2bm} \left\{ K(y)_m + (2\mathcal{E} - \eta) \mathcal{U}(y)_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{l}. \quad (10)$$

Konečně pro příčnou posouvající sílu obdržíme ze vztahu

$$L_p = -Q_p \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (Q_p \nu_p + \gamma_T) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$$

výraz

$$L_p = \sum p_m \left\{ \mathcal{K}(y)_m + \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{\gamma_T}{\sqrt{Q_T Q_p}} \right) \mathcal{T}(y)_m \right\} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (11)$$

v němž  $\mathcal{K}(y)_m$  je čtvrtý bezrozměrný součinitel, závislý opět na  $\nu^b$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$  a  $\psi$ .

Je vidět, že jsou-li jednou tyto součinitele známy, je výpočet všech vnitřních sil v libovolném místě konstrukce a od libovolného zatížení velmi prostý a rychlý a lze použít takových pomůcek, jako např. logaritmické pravítko. Na druhé straně lze, je-li to žádáno, provést celý výpočet prostřednictvím samočinného počítače pro každý speciální případ (tj. uspořádání konstrukce, její velikost, druh a velikost zatížení atd.), neboť program výpočtu až na vstupní hodnoty tří bezrozměrných parametrů zůstává stejný.

Zcela obdobným způsobem lze odvodit příslušné vztahy pro vnitřní síly i pro zatížení  $p(x) = \frac{p(x)}{2b}$  rovnoměrně rozdělené po šířce konstrukce (obr. 2), čímž se získají další čtyři bezrozměrné součinitele  $\mathcal{K}^{\circ}(y)_m$ ,  $\mathcal{M}^{\circ}(y)_m$ ,  $\mathcal{T}^{\circ}(y)_m$ ,  $\mathcal{K}^{\circ}(y)_m$  jako funkce  $\nu^b$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ .

Výrazy pro vnitřní síly (které jsou estatně shodné těm, jež by se získaly integrací hodnot odvozených pro přímkové zatížení) v tomto případě jsou přímo :

$$w^{\circ}(x, y) = \sum \frac{p_m^{\circ} l^4}{Q_T \pi^4 m^4} \left[ 1 + K^{\circ}(y)_m \right] \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$M_T^{\circ} = \sum \frac{p_m^{\circ} l^2}{\pi^2 m^2} \left[ 1 + K^{\circ}(y)_m - \eta(\mu^{\circ}(y)_m) \right] \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$M_P^{\circ} = \sum \frac{p_m^{\circ} b^2}{\beta^2 \pi^2 m^2} \left[ \eta - \mu^{\circ}(y)_m + \eta K^{\circ}(y)_m \right] \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$(M_{TP} - M_{PT})^{\circ} = \sum \frac{2p_m^{\circ}}{\pi^2 m^2} \frac{lb}{\beta} (\alpha - \eta) \tau^{\circ}(y)_m \cos \frac{m\pi x}{l}$$

(12)

$$Q_T^{\circ} = \sum \frac{lp_m^{\circ}}{\pi m} \left\{ 1 + K^{\circ}(y)_m - \frac{\partial_T \eta + (2\varepsilon - \eta) \partial_P}{\partial_T + \partial_P} \mu^{\circ}(y)_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{l}$$

$$\bar{Q}_T^{\circ} = \sum \frac{lp_m^{\circ}}{\pi m} \left\{ 1 + K^{\circ}(y)_m - (2\varepsilon - \eta) \mu^{\circ}(y)_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{l}$$

$$Q_P^{\circ} = \sum \frac{p_m^{\circ} b}{\pi m \lambda} \left[ \eta + \frac{\partial_T}{\sqrt{Q_T Q_P}} \right] \tau^{\circ}(y)_m - \alpha^{\circ}(y)_m \left\} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

Nutnost vyčíslovat bezrozměrné součinitele pro každou konkrétní kombinaci bezrozměrných parametrů by ovšem vyloučila možnost tabulace bezrozměrných součinitelů a tím praktickou použitelnost metody. Rozbor jednotlivých

funkcí však ukázal, že jejich průběh je natolik monotonní, že dovolí dostatečně jednoduchou interpolaci mezi hraničními hodnotami parametrů  $\alpha$  a  $\eta$  při zachování přijatelné přesnosti.

Všimneme si nejdříve, v jakém rozsahu hodnot se mohou jednotlivé bezrozměrné parametry  $\nu^2$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$  příp.  $\varphi$  a  $\psi$  pohybovat.

Kdyby konstrukce byla nekonečně tuhá v příčném směru, byl by parametr příčného ztužení nulový. U konstrukce příčně zcela netuhé rostl by parametr příčného ztužení nade všechny meze (obr.3). Tento parametr se pro běžné konstrukce může pohybovat v mezích 0,05 + 5,0. Je tedy teoreticky

$$0 \leq \nu^2 \leq \infty \quad (13)$$

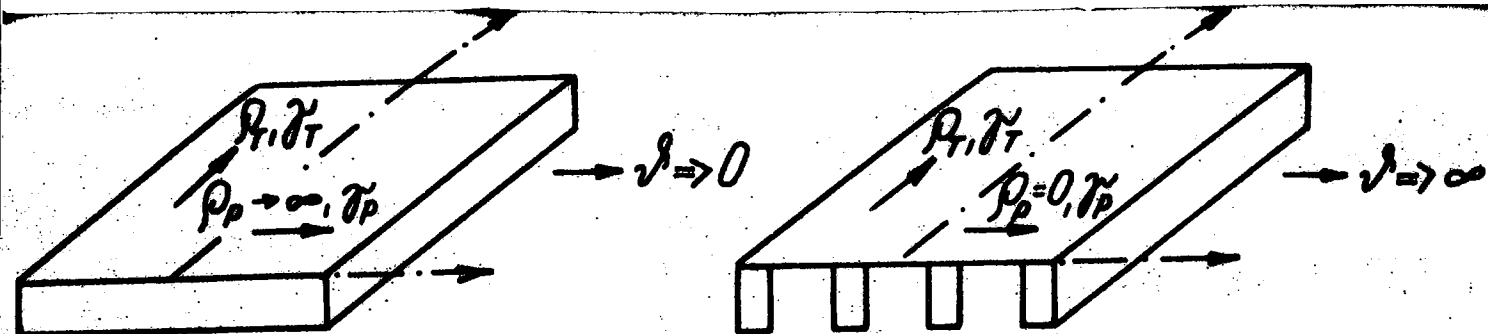
prakticky

$$0,05 \leq \nu^2 \leq 5,0 \quad (14)$$

Parametr kontrakční schopnosti je podle definice závislý kromě na poměru ohybových tuhostí i na Poissonovu součiniteli  $\nu_r$ . Čím menší je příčná tuhost konstrukce, tím je vliv příčné kontrakce v konstrukci menší. Největší úlohu hraje tedy příčná kontrakce u desky, když  $Q_r = Q_p$  a parametr  $\eta$  dosahuje hodnoty shodné s Poissonovým součinitelem  $\nu_r$ , tj. např. u betonu 0,20, u oceli 0,25. S nulovou příčnou tuhostí ztrácí význam i příčná kontrakce; je tedy

$$0 \leq \eta \leq \nu_r (\leq 0,5) \quad (15)$$





$$0 \leq \nu \leq \infty$$

$$(0,05 \leq \nu \leq 5,0)$$

$$0 \leq \eta \leq \nu_T (\leq 0,5)$$

Tuhost v kroucení se mění od nulové, příslušející např. prostému roštu (bez desky) netuhému v kroucení (s kloubovými styčnicí), k plné, příslušné desce (obr.4). Podle toho se bude měnit i parametr  $\alpha$  (stejně jako  $\varepsilon$ ).

Pro konstrukci zcela netuhou v kroucení je  $\gamma_T = \gamma_p = 0$  a tedy i  $\alpha = 0$ ; dochází-li však k přenosu horizontálních přetvoření (jako u kloubového roštu s identickými střednicovými rovinami v obou směrech) bude  $\varepsilon = \eta$ . Pouze v případě, že jak tuhost v kroucení, tak i kontrakční schopnost jsou nulové (jako u roštu s kloubovými a posuvnými styčnicí) bude i  $\varepsilon = 0$ . Větší tuhost v kroucení než je vlastní plně isotropní nebo materiálově ortotropní desce si nelze představit, neboť každou konstrukci deskového typu, vytvořenou trámy je možno si představit reversně jako desku, jež má tloušťku nejvyššího průřezu konstrukce, z níž části hmoty mezi trámy byly vybrány. Pro desku je hodnota tohoto parametru  $\alpha = 1$ , takže ve všech případech se pohybuje torsní parametr v mezích

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (16)$$

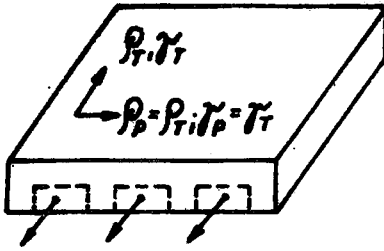
Pokud se zanedbávají ve výrazu se středním členem Huberovy rovnice (rov.1a) první dva členy - jak je většinou zvykem - přestože  $\nu \neq 0$ , vyšel by součinitel  $\varepsilon$  v mezích

$$0 \leq \varepsilon \leq (1-\eta),$$

zatímco správně je

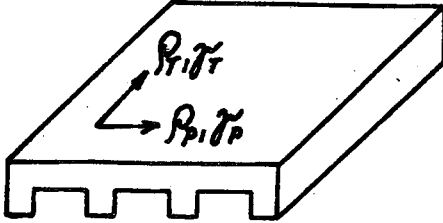
$$\eta \leq \varepsilon \leq 1.$$

Pro interpolaci lze tedy užít hraničních hodnot  $\alpha = 0$  a  $\alpha = 1$  a např.  $\eta = 0$  a např.  $\eta = 0,25$  (neboť  $\eta > 0,25$  se vyskytuje zřídka).



$$\alpha \rightarrow 1$$

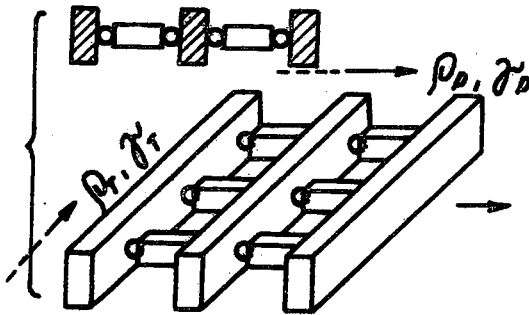
$$\varepsilon \rightarrow 1$$



$$\alpha < 1$$

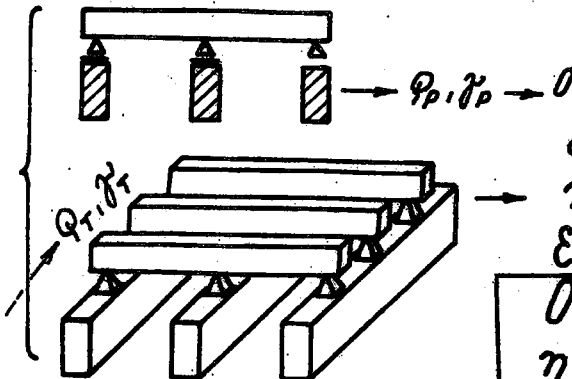
$$\varepsilon < 1$$

Pokud  $\nu \neq 0$ ,  
ale  $2H = \gamma_T + \gamma_P$   
bylo by  
 $0 \leq \varepsilon \leq (1 - \eta)$



$$\alpha \rightarrow 0$$

$$\varepsilon \rightarrow \eta$$



$$\alpha \rightarrow 0$$

$$\eta \rightarrow 0$$

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\eta \leq \varepsilon \leq 1$$

Obr. 4

Pro všechny funkce lze použít jednoduché parabolické interpolace podle vztahu /16/

$$K_{[k]} = K_{[min]} + (K_{[max]} - K_{[min]}) F(k) \quad (17)$$

Interpolaci lze přirozeně provádět s různou přesností. Hodnoty funkce  $F(k)$  z rovnice (13) byly nejdříve stanoveny tak, aby chyba interpolované hodnoty bezrozměrného součinitele proti skutečné hodnotě byla menší než 3,5%. Protože však pro praktické použití nemají valný význam jak absolutně, tak i relativně malé hodnoty (vzhledem k největší hodnotě příslušného součinitele pro jisté  $\mathcal{A}$ ), byly odvozeny funkce  $F(k)$  zjednodušeny tak, aby pod 3,5% zůstala chyba vážená (redukována)  $R_{[k]}$  podle poměru absolutních hodnot uvažovaného  $K_{[k]}$  a maximálního součinitele  $K_{[k]max}$  (pro dané  $\mathcal{A}$ ), tj.

$$\bar{R}_{[k]} = R_{[k]} \frac{K_{[k]}}{K_{[k]max}} \leq 3,5\%$$

Ukázalo se, že výhodnější je provést nejdříve interpolaci podle  $\eta$  postupně pro  $\alpha=0$  a  $\alpha=1$ , tj. naleznou se funkce  $K_{0,\eta}$  a  $K_{1,\eta}$  pomocí základních funkcí  $K_{0,0}$ ,  $K_{0,0,25}$ ,  $K_{1,0}$ ,  $K_{1,0,25}$ . Interpolace podle  $\eta$  je u všech součinitelů stejná a  $F(\eta) = 4\eta$ . Potom se provedou zbývající interpolace mezi dvěma funkcemi  $K_{0,\eta}$  a  $K_{1,\eta}$  podle  $\alpha$ , tj. nalezne se hledaná funkce  $K_{\alpha,\eta}$  pomocí interpolací funkce  $F(\alpha)$ , uvedené pro různé bezrozměrné součinitele v tab. 1.

Tabulka 1.

$\nu^{\beta}$	koef.	$F(\alpha)$	
0,05- -0,40	$k$	$\alpha$ $(-0,06 + 0,90\beta)$	
	$\mu$	$\varphi, \psi \leq 0$	$\varphi, \psi = 0$
		$\alpha$ $(-0,012 + 0,72\beta)$	$\alpha$ $(-0,07 - 1,21\beta)$
	$\tau$	$\psi = 0$	$\psi \neq 0$
		$\alpha$ $(0,075 - 1,42\beta)$	$\alpha$ $(-0,055 + 0,88\beta)$
$\mathcal{R}$	$\alpha$ $(-0,046 + 0,70\beta)$		
0,45- -5,0	$k$	$\sqrt{\alpha}$	
	$\mu$		
	$\tau$		
	$\mathcal{R}$		

Hledaná hodnota bezrozměrného součinitele bude tedy

$$\mathcal{L}_{\alpha, \eta} = \mathcal{L}_{0,0} + [\mathcal{L}_{0,0,25} - \mathcal{L}_{0,0}] 4\eta + \{ \mathcal{L}_{1,0} - \mathcal{L}_{0,0} + \quad (18)$$

$$+ [(\mathcal{L}_{1,0,25} - \mathcal{L}_{1,0}) - (\mathcal{L}_{0,0,25} - \mathcal{L}_{0,0})] 4\eta \} F(\alpha).$$

Tímto způsobem, prostřednictvím bezrozměrných součinitelů, určených z jejich charakteristických (hraničních) hodnot (které mohou být tabelovány v závislosti na bezrozměrných parametrech) pomocí interpolační funkce, je zvládnut prvý problém - řešení příslu...

parciální definice rovnice tvarové ortotropní desky.

Doposud bylo předpokládáno, že ekvivalentní deskou se nahrazuje systém dvojeose symetrický s ne-  
 proměnně rozdělenými tuhostmi. V řadě praktických  
 případů však tato podmínka není splněna, když např.  
 okrajové nosníky jsou jiného průřezu než střední  
 nosníky nebo ortotropní deska je na okrajích vyztuže-  
 na okrajovými ztužidly. Tyto skutečnosti lze zahrnout  
 rovněž do předloženého výpočtu pomocí bezrozměrných  
 součinitelů. Je však třeba nejprve doplnit uvedené  
 výrazy o okrajové pootočení vlivem vertikálního zatí-  
 žení podle vztahu

$$\beta_{zb} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{\pm b}$$

ve tvaru

$$\beta_{(\pm b)} = \sum \frac{\rho_m l^2}{4\sqrt{\rho_r \rho_p} \pi^2 m^2} \left[ T(y)_m \right]_{y=\pm b} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{l} \quad (19)$$

pro přímkové zatížení, resp.

$$\beta_{zb}^0 = \sum \frac{\rho_m (b^2)}{\sqrt{\rho_r \rho_p} \pi^2 m^3} \eta \left[ T^0(y)_m \right]_{y=\pm b} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{l} \quad (20)$$

pro po šířce rovnoměrné zatížení.

Dále je třeba stanovit účinek okrajových momentů. Podobným způsobem jako byly odvozeny vnitřní síly pro  
 svislé zatížení lze získat vnitřní síly v konstrukci  
 i pro zatížení symetrickými resp. antisymetrickými  
 momenty, působícími na volném okraji konstrukce (v  $y =$   
 $\pm b$ ) ve směru  $X$  rozloženými do harmonické funkce.

Pro účely dalšího výpočtu stačí určit především průhyb

$$w^S(x,y) = \sum \frac{M_m b^2}{\varrho_p} \tilde{\phi}_{(y)m}^S \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (21)$$

$$w^A(x,y) = \sum \frac{M_m b^2}{\varrho_p} \tilde{\phi}_{(y)m}^A \sin \frac{m\pi x}{l},$$

pootočení na okrajích

$$\beta^S = \sum \frac{M_m b}{\varrho_p} \Gamma_{(b)m}^S \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (22)$$

$$\beta^A = \sum \frac{M_m b}{\varrho_p} \Gamma_{(b)m}^A \sin \frac{m\pi x}{l}$$

a příčné ohybové momenty

$$M_p^S = \sum M_m \Psi_{(y)m}^S \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (23)$$

$$M_p^A = \sum M_m \Psi_{(y)m}^A \sin \frac{m\pi x}{l}$$

V těchto výrazech vystupují nové bezrozměrné součinitele  $\tilde{\phi}^S$ ,  $\tilde{\phi}^A$ ,  $\Gamma^S$ ,  $\Gamma^A$  a  $\Psi^S$ ,  $\Psi^A$ , jež jsou funkcí  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$  a  $\psi$  (kromě  $\Gamma$ ), a platí podle indexu pro symetricky resp. antisymetricky působící okrajové momenty. Rovněž tyto součinitele je možno tabelovat v závislosti na  $\nu$  a hraničních hodnotách  $\alpha$  a  $\eta$  a pomocí interpolačních vzorců nalézt jejich hodnotu pro skutečnou hodnotu parametrů  $\alpha$  a  $\eta$ . Všechny tyto operace, jež se neliší v zásadě od postupů při odvození základních funkcí a bezrozměrných součinitelů  $d$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $\alpha$ , byly provedeny a lze je nalézt např. v /10, 11, 17/.

Neznámé hodnoty ohybových momentů a posouvajících sil, nahrazujících účinek okrajového ztužení, se určí z podmínky shodnosti průhybu a pootočení volného okraje konstrukce (bez okrajového ztužení) a samotného (odděleného) okrajového ztužidla. Stanovení všech vnitřních sil od vnějšího zatížení, za které se považují okrajové posouvající síly a okrajové momenty se provede pak již zcela stejným způsobem s použitím příslušných bezrozměrných součinitelů.

Nalezených vztahů pro vnitřní síly při působení okrajových symetrických momentů lze dále s výhodou využít pro návrh nebo posouzení excentrického příčného předpětí konstrukcí z předpjatého betonu. Lze např. určit nejen optimální změnu velikosti příčného předpětí ve směru rozpětí, ale i optimální hodnotu excentricity předpínacích kabelů /7/.

Další otázkou je, je-li možno odvozenou metodu modifikovat i pro konstrukce s jiným způsobem uložení (konstrukce spojitě, rámové, vetknuté). Podrobné rozborry provedené na analogických vlastního kmitání jednotlivých typů konstrukcí ukázaly, že metodu lze jednoduše použít obecně. Rozdíl spočívá pouze v tom, že je třeba stanovit tzv. redukovanou podélnou tuhost fiktivního prostého systému, jež má stejné svislé deformace (průhyby) např. uprostřed rozpětí jako skutečný systém při stejnem zatížení. Pomocí této redukované podélné tuhosti se určí redukované bezrozměrné parametry  $\nu^*$  a  $\alpha^*$  a jejich pomocí již normálním způsobem potřebné bezrozměrné součinitele<sup>a</sup> vnitřní síly /7/.



V další části práce je věnována pozornost druhému hlavnímu problému; vstupním hodnotám, zajišťujícím konvertibilitu řešeného a skutečného systému (viz např. /13, 15/).

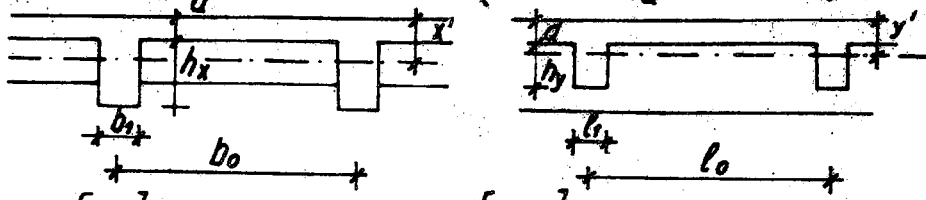
Předložený výpočet používá namísto skutečného tvaru konstrukce ekvivalentní desku. Ohybová tuhost této ekvivalentní desky je úměrná ohybovým tuhostem skutečné konstrukce, které jsou ovlivněny i nemožností volného přetváření v kolmém směru působením některých jejích částí. Tento účinek je podobný, jako kdyby příslušná elastická konstanta materiálu rostla. Modul pružnosti materiálu (Youngův modul) sám se však nemění a jediné, co může elastické konstanty ještě ovlivnit je změna Poissonových součinitelů; namísto skutečných Poissonových součinitelů materiálů konstrukce nastoupi modifikované součinitele příčné kontrakce. Tyto součinitele budou obvykle větší než materiálové Poissonovy součinitele.

Použije-li se obvyklého postupu určení ohybové tuhosti skutečné konstrukce složením ohybových tuhostí jejích částí ke společné težiškové ose (postupně v obou ortotropních směrech), bude se vliv příčné kontrakce projevovat ve výpočtu jednotlivých částí rozdílně.

Je-li např. podle obr. 5 průřez složen z deskových a prismatických částí (např. rošt s deskou), bude u deskové části (index  $D$ ) příčným spolupůsobením kolmých prutových (prismatických, index  $PR$ ) elementů schopnost její kontrakce změněna: Poissonův součinitel materiálu desky se zvýší, ohybová tuhost rovněž.

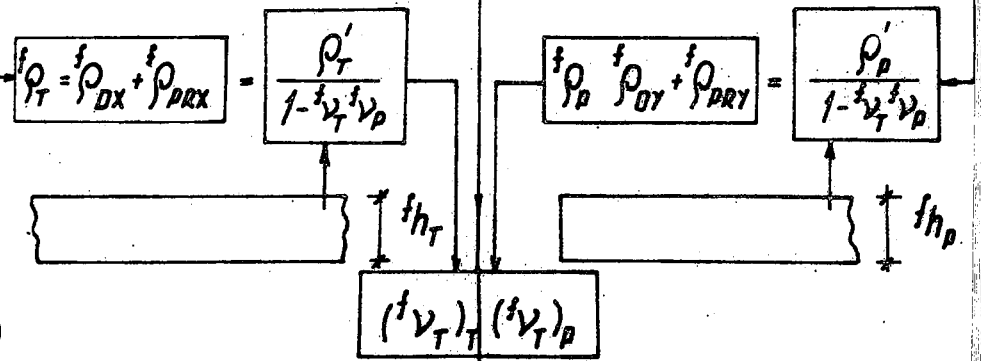
Změnu příčné kontrakce desky lze nalézt např. fiktivní změnou její tloušťky. Fotoelasticimetrické experimenty, prováděné k podrobné analýze napjatosti podobných systémů ukázaly, že - soudě podle rozhodujících oblastí -

$$i_{Q_{DX}} = \frac{\epsilon_0 J_{DX}}{b_0 (1 - \nu_{DXX}^2) \frac{d + \Delta d}{d}} \quad \frac{\epsilon_0 J_{DX}}{b_0 [1 - \nu_{DXX}^2] \left\{ \frac{d + \frac{1}{6} h_y}{d} \frac{l_1}{l_0} \frac{b_0 - b_e}{b_0} \frac{\nu_{DXY}}{\nu_0} \right\}}$$



$$i_{Q_{DXX}} = \frac{\epsilon_{DXX} J_{DXX}}{b_0 [1 - \nu_{DXX}^2]} = \frac{\epsilon_{DXX} J_{DXX}}{b_0 [1 - \nu_{DXX}^2] \frac{h_y}{h_x} \frac{l_1}{l_0} \left( \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \frac{b_e}{b_0} \right) \frac{\nu_{DXY}}{\nu_{DXX}}}$$

$$i_{\nu_P} = i_{\nu_T} \frac{i_{Q_P}}{i_{Q_T}} \quad h_y \leq h_x$$



Obr. 5

Je možné k tomuto účelu předpokládat účinné rozdělení vykového toku mezi skutečnou deskou s kolmým prutovým elementem cca na 1/6 výšky tohoto elementu. Jinak řečeno to znamená, že cca 1/6 výšky kolmých prutových elementů se zúčastní příčné kontrakce desky a ovlivní tak její materiálový Poissonův součinitel. Fiktivní zvýšení tloušťky skutečné desky vychází potom z rozdělení ("rozmazání") příslušných částí kolmých trámů a z jejich redukce podle Poissonových součinitelů obou částí průřezu.

Také prutové části se ovlivňují navzájem, když zabránují jeden druhému volnému příčnému přetvoření. Tento účinek bude přirozeně tím větší, čím hustší bude sít prutových elementů a naopak. I v tomto případě se tento účinek projeví, jako kdyby rostla příslušná elastická konstanta materiálu prutových částí. Protože, jako v předešlém případě, modul pružnosti materiálu se sám nezmění, lze zavést změnu elastické konstanty převodem na fiktivní desku, u níž elastická konstanta je dána poměrem modulu pružnosti a součinitele  $(1-\nu^2)$ . Míra účinku fiktivní desky bude závislá na vzdálenosti příčných trámů a na poměru jejich výšky k výšce podélných trámů.

Celková ohybová tuhost konstrukce daná součtem tuhostí všech jejích, takto modifikovaných, částí (ovšem ke společně těžištvé ose) je pak rovna ohybové tuhosti náhradní, fiktivní desky.

Pro ohybovou tuhost fiktivní desky platí, že

$$f_{\mathcal{D}_T} = \frac{E_T'}{1 - [\nu_T^2 \nu_{pT}]} \quad (24a)$$

kde  $\rho_T'$  značí podélnou tuhost konstrukce bez vlivu příčné kontrakce jednotlivých jejích částí,  $f_{\nu_T}$ ,  $f_{\nu_P}$  jsou kontrakční součinitele fiktivní desky v podélném a příčném směru.

Obdobně pro fiktivní ohybovou tuhost v příčném směru je

$$f_{\rho_P}' = \frac{\rho_P'}{1 - [f_{\nu_P} f_{\nu_T}]_P} \quad (24b)$$

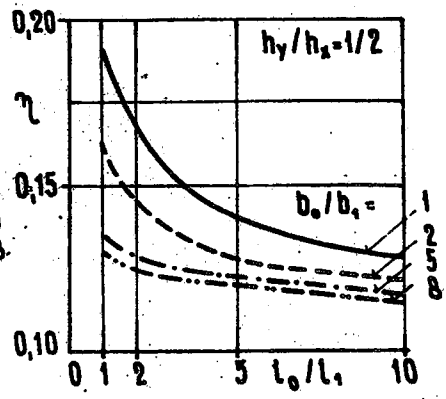
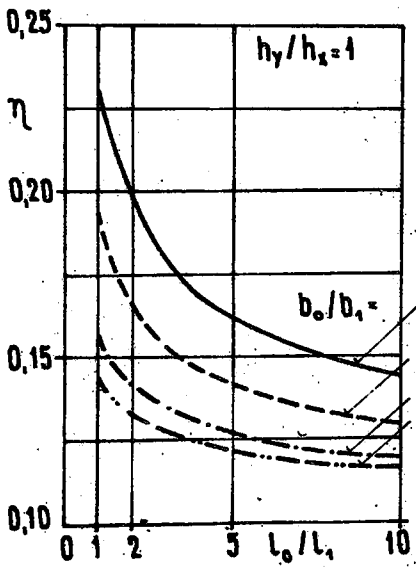
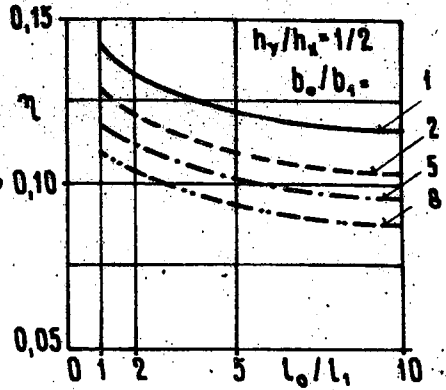
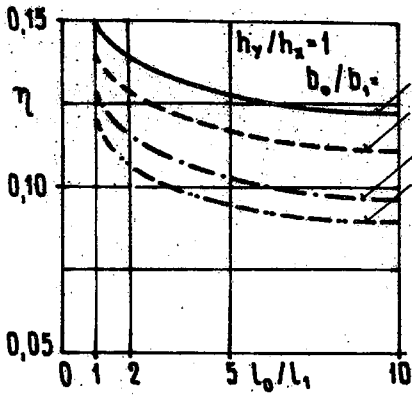
Potřebný výraz pro hodnotu parametru kontrakční schopnosti získáme po uvážení předpokladu  $f_{\nu_P} = f_{\nu_T} \frac{f_{\rho_P}}{f_{\rho_T}}$  pomocí střední hodnoty  $[f_{\nu_T}]_T$  a  $[f_{\nu_T}]_P$  ve tvaru

$$\eta = \sqrt{\sqrt{\frac{f_{\rho_T} - \rho_T'}{f_{\rho_T}}} \sqrt{\frac{f_{\rho_P} - \rho_P'}{f_{\rho_P}}}} \quad (25)$$

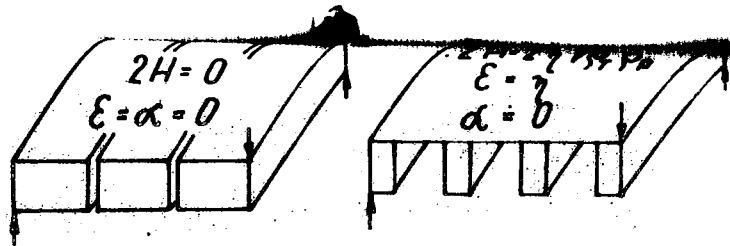
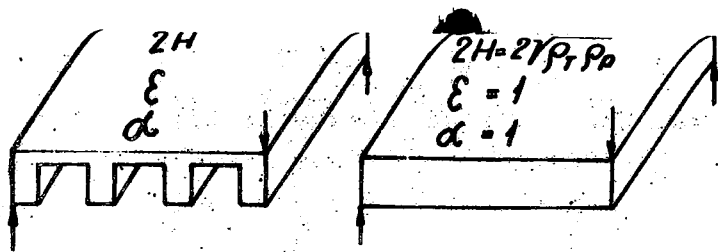
Jak se mění parametr kontrakční schopnosti u konstrukce složené z desky a prismatických prvků podle změny jednotlivých průřezových veličin ukazuje např. obr. 6.

Určení hodnoty tuhosti v kroucení tvarové ortotropní konstrukce jako celku bývá nejobtížnější. Problém je velmi složitý a patrně se s dosavadními znalostmi nepodaří jej řešit při zachování praktické použitelnosti. Spočívá nejen ve stanovení příčinku torsní i ohybové tuhosti jednotlivých částí konstrukce k torsní tuhosti celku, ale i příčinku ohybové tuhosti ke spolupůsobení jednotlivých částí v kroucení.

Představa zkoušky celé konstrukce čistým kroucením (antiklastickou zkouškou)-obr.7-poskytne ihned důkaz o značném vlivu ohybové tuhosti. Je-li deska plná, má maximální tuhost v kroucení. Jestliže se prořeže svislými řezy na celou výšku např. v podélném směru, stává se evidentně konstrukce jako celek zcela netuhá v kroucení, přesto, že obvyklé přibližné výpočtové metody, pracující se součtem torsních tuhostí jednotlivých prvků, dávají celkovou tuhost prakticky stejnou jako u plné desky.



Obr. 6



$$f_{h_T}^3 = \frac{12(1-\eta^2)\rho_T}{f_{E_T}}$$

$$f_{\gamma_T} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{f_{h_T}^3}{h_T} a \frac{f_{E_T}}{2(1+\eta)}$$

$$a = \sqrt{\frac{(\int |x| dx) dF_D}{(\int |x| dx) dF_H}} \rho_D \leq 1$$



$$\gamma = \frac{\gamma_T + \gamma_D}{2}$$

$$f_{h_D}^3 = \frac{12(1-\eta^2)\rho_D}{f_{E_D}}$$

$$f_{\gamma_D} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{f_{h_D}^3}{h_D} b \frac{f_{E_D}}{2(1+\eta)}$$

$$b = \sqrt{\frac{(\int |x| dx) dF_T}{(\int |x| dx) dF_H}} \rho_T \leq 1$$

$$\alpha = \frac{f_{\gamma_T} f_{\gamma_D}}{2(1-\eta) \sqrt{\rho_T \rho_D}} \frac{f_{\rho_T} a + f_{\rho_D} b}{2 \sqrt{\rho_T \rho_D}} (\leq 1)$$

Torsní tuhost konstrukce bude však redukována při redukcí příčné ohybové tuhosti a to až k nule, pokud se zanedbá vliv vodorovných smykových sil (membránový účinek). Využitím fiktivní desky, definované při stanovení ohybových tuhostí, pro určení přibližné hodnoty torsní tuhosti konstrukce může být dosaženo rozumného výsledku.

Tuhost v kroucení systému a zejména účinnost přínosu torsních tuhostí jednotlivých prvků k torsní tuhosti celkové jsou závislé jak na přenosu tahových nebo tlakových namáhání, tak na přenosu namáhání ohybových. Provedeme-li separaci obou vlivů, bude o účinnosti celkové torsní tuhosti např. v podélném směru rozhodovat jak absolutní součet statických momentů příčných prvků nad a pod osou kroucení podélného prvku k této ose (popisující tzv. "vláknitý" účinek, který je tím účinnější, čím spojovací vlákna jsou dále od středu kroucení), tak ohybová tuhost (popisující "ohybový" účinek, který je nezávislý na umístění příčných prvků po výšce průřezu) těchto příčných prvků. Oba příčinky jsou natolik vyvážené ve většině praktických případů, že můžeme s dobrým přiblížením uvažovat pro další výpočet s jejich geometrickým průměrem. Při stanovení torsní tuhosti konstrukce nesmíme však zapomenout pracovat s tloušťkami fiktivních desek, plynoucích z příslušných ohybových tuhostí, tj. např.

$$f_{h_T}^3 = \frac{12(1-\eta^2) \rho_T}{E_T} \quad (26)$$

takže

$$\eta_T = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{f_{H_x}^3}{T} \frac{f_{E_T}}{2(1+\eta)} a = (1-\eta) a \varphi_T \quad (27)$$

Součinitel  $a$  vyjadřuje torsní účinnost systému vzhledem k plné torsní tuhosti desky o výšce stejné jako nejvyšší průřez konstrukce. Podle horního výkladu je

$$a = \sqrt{\frac{(\int^F |x| dF_p)^2 \varphi_p}{(\int^F |x| dF_{H_x}) \varphi_{H_x}}} \quad (28)$$

kde hodnoty v čitateli odpovídají skutečné konstrukci, ve jmenovateli plné desce o tloušťce  $H_x$  rovné nejvyššímu průřezu konstrukce. Dosazením do výrazu pro torsní parametr obdržíme po úpravě

$$\alpha = \frac{f_{\varphi_T} a + f_{\varphi_p} b}{2 \sqrt{f_{\varphi_T} f_{\varphi_p}}} \quad (29)$$

a skutečně je vždy  $\alpha \leq 1$ .

Opět na příkladu konstrukce vytvořené deskou a prismatickými prvky je ukázána změna parametru  $\alpha$  se změnou průřezových charakteristik (obr. 8). Je např. vidět, že pouhým prořezáním desky na výšku trámů se sniží parametr  $\alpha$  pod 1/5 původní hodnoty stejně, jako při velmi řídkém uspořádání podélníků a příčníků.

K učinění představy o vlivu změny bezrozměrných parametrů na bezrozměrné součinitele  $a$  tím na vnitřní síly tvarově ortotropní desky, podívejme se na několik

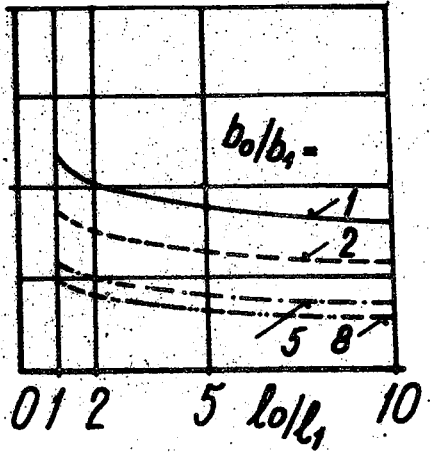
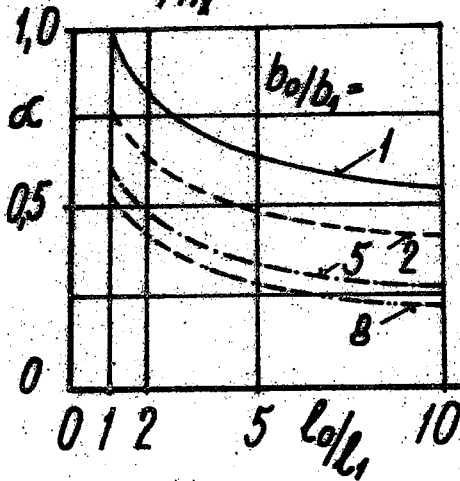


$$E_{PRX} = 300000 \text{ kp/cm}^2$$

$$h_y/h_x = 1$$

$$\nu_0 = \nu_{PRX} = 0,15$$

$$h_y/h_x = 1/2$$



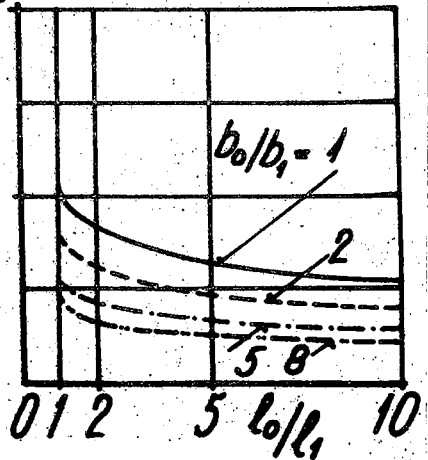
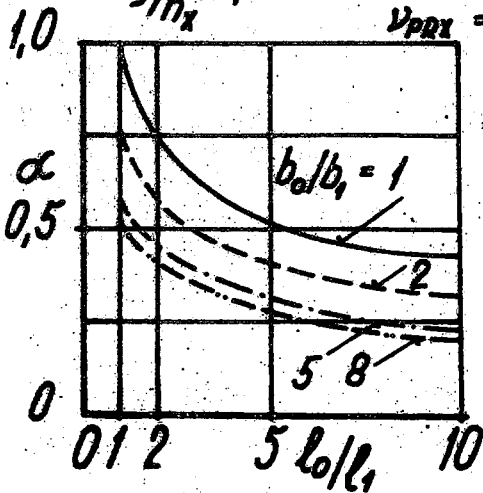
$$E_{PRX} = 2100000 \text{ kp/cm}^2$$

$$h_y/h_x = 1$$

$$\nu_0 = 0,15$$

$$h_y/h_x = 1/2$$

$$\nu_{PRX} = 0,25$$



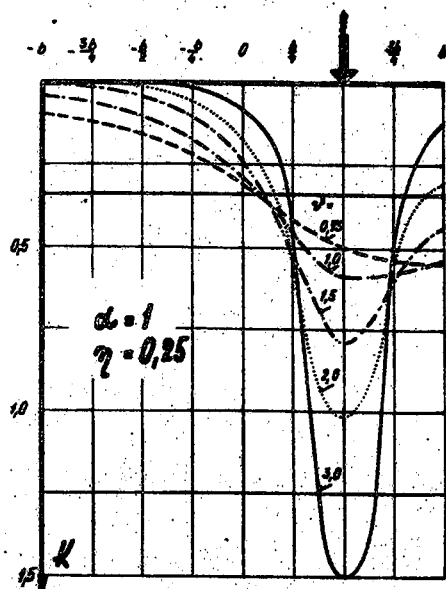
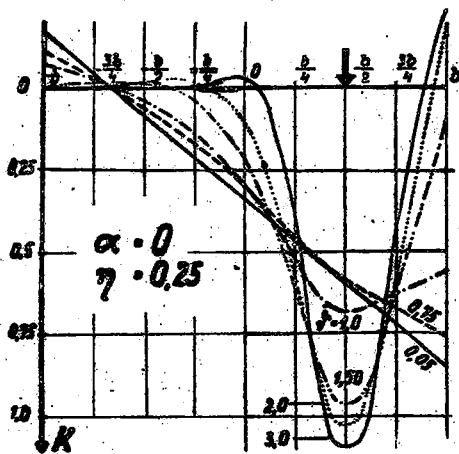
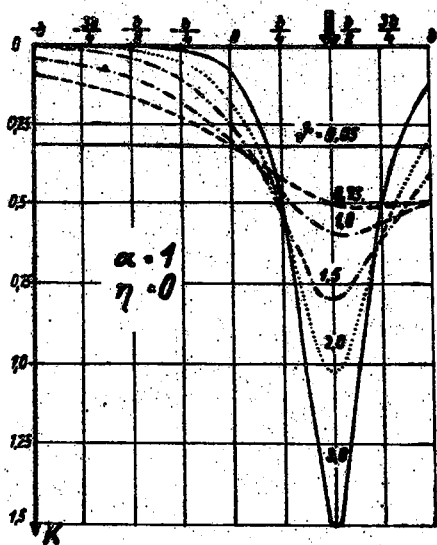
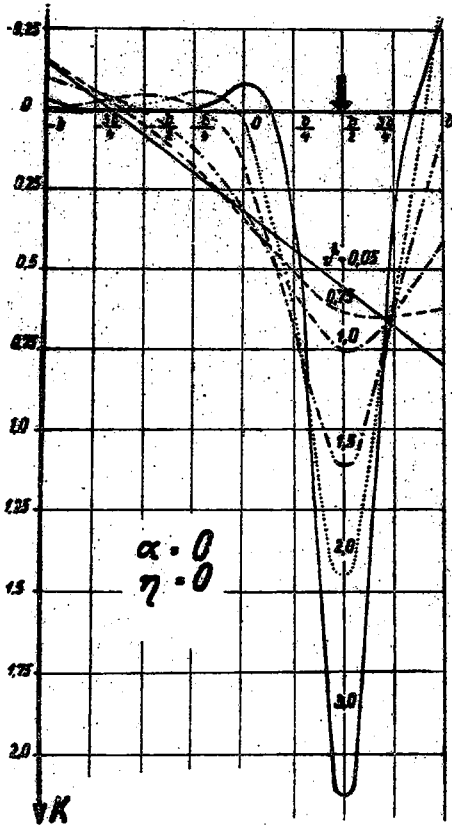
Obr. 8

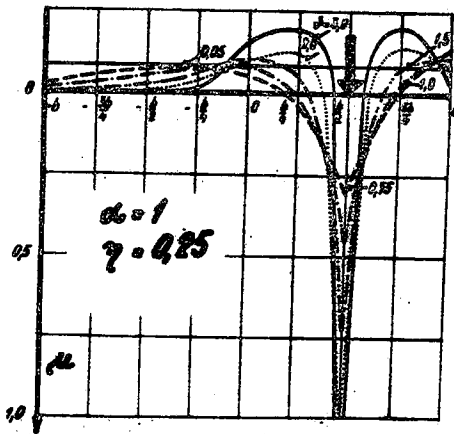
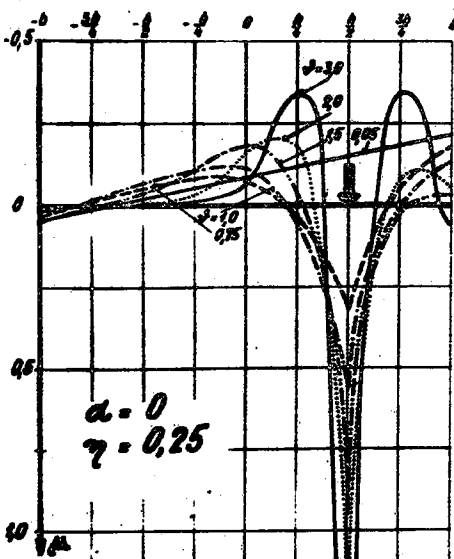
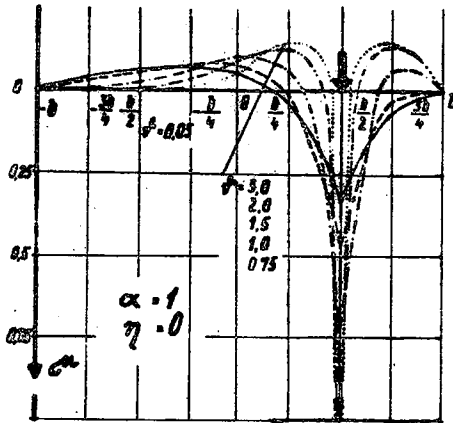
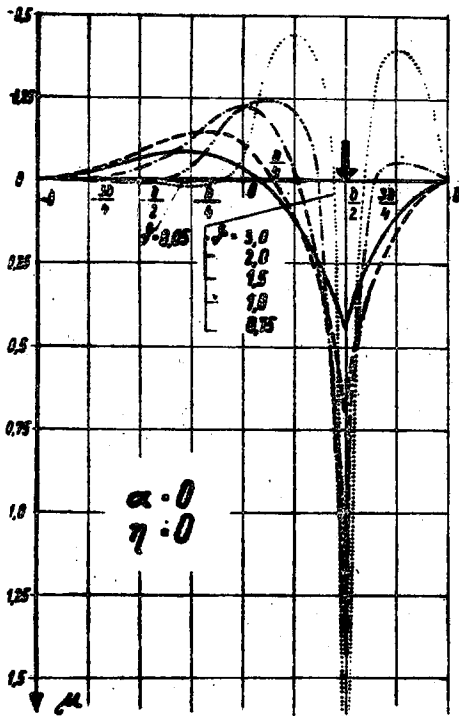
charakteristických příkladů, např. při přímkovém zatížení, působícím v jedné čtvrtině šířky konstrukce. Obr. 9 ukazuje vliv změny parametru  $\beta$  při  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\eta = 0$ ,  $\eta = 0,25$  na velikost součinitele  $\kappa$ , další obr. 10 na velikost součinitele  $\mu$ . Vliv změny torsního parametru  $\alpha$  na bezrozměrné součinitele  $\kappa$  a  $\mu$  pro libovolně zvolené  $\beta = 0,75$  a používané hraniční hodnoty parametru  $\eta$  je vidět z obr. 11 a obr. 12. Konečně o vlivu parametru kontrakční schopnosti na součinitele  $\kappa$  a  $\mu$  opět pro  $\beta = 0,75$ ,  $\alpha = 0$  a  $\alpha = 1$  podává představu obr. 13 a obr. 14. Vliv parametru  $\alpha$  a  $\eta$  na bezrozměrný součinitel  $\kappa$  je malý, vliv všech parametrů na bezrozměrný součinitel  $\tau$  je značný.

Odvozená metoda poprvé důsledně zavádí do počtu vliv příčné kontrakce; to umožňuje analyzovat chyby, kterých se dopouštíme, jestliže příčnou kontrakci zanedbáváme (viz např. /14/). Označíme-li správnou hodnotu bezrozměrného součinitele  $\kappa(\beta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)$  a hodnotu bezrozměrného součinitele, idpovídajícího  $\eta = 0$  (tj. nedbá-li se při výpočtu diferenciální rovnice (1) součinitele příčné kontrakce při stanovení integračních konstant)  $\kappa(\beta, \alpha, \varphi, \psi)$  je chyba vlivem zanedbání  $\eta$

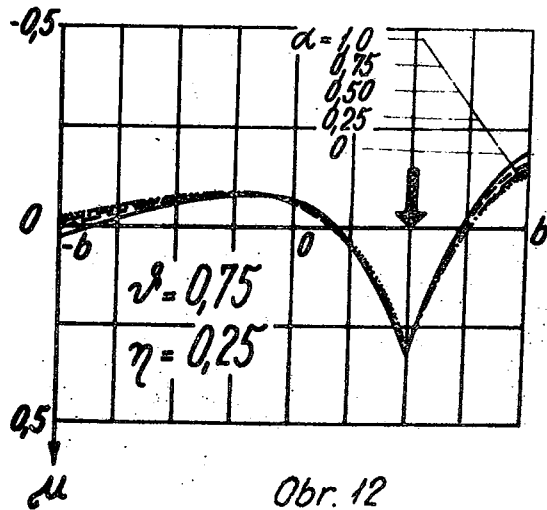
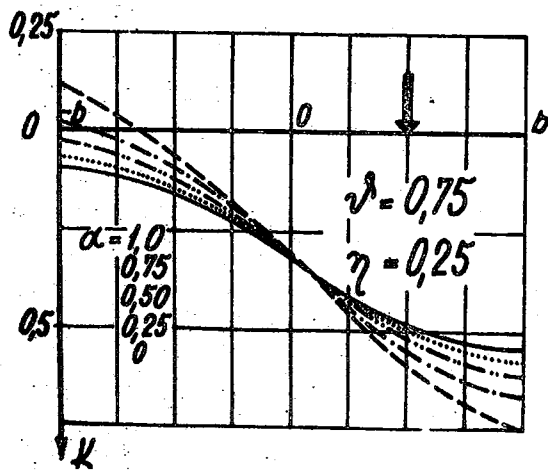
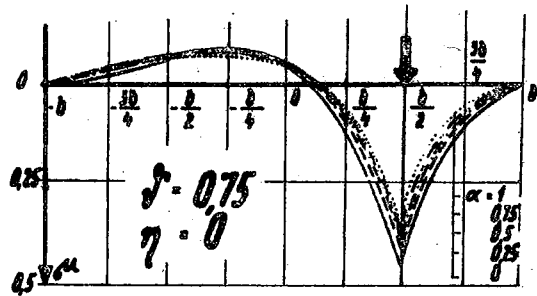
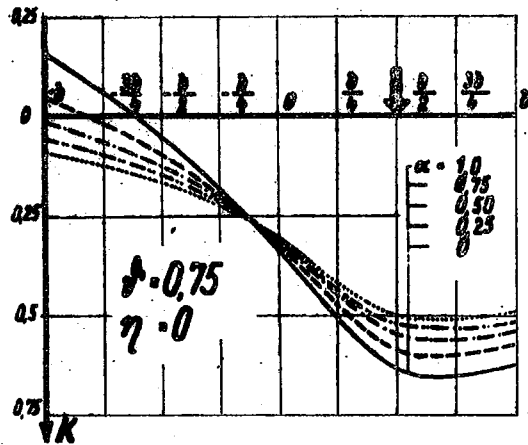
$$\Delta_{\kappa(\beta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)} = \frac{\kappa - \kappa_0}{\kappa} \quad (30)$$

Největší praktický význam mají absolutně největší hodnoty součinitelů a tedy i jejich přesnost. Naopak u absolutně malých hodnot součinitelů klesá úměrně i význam dosažené přesnosti. Aby se uvedl na správnou míru význam chyb u jednotlivých bezrozměrných součinitelů, lze chyby  $\Delta_{\kappa}$  redukovat absolutním poměrem uvažovaného součinitele  $\kappa(\beta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)$  k největšímu součiniteli naleže-



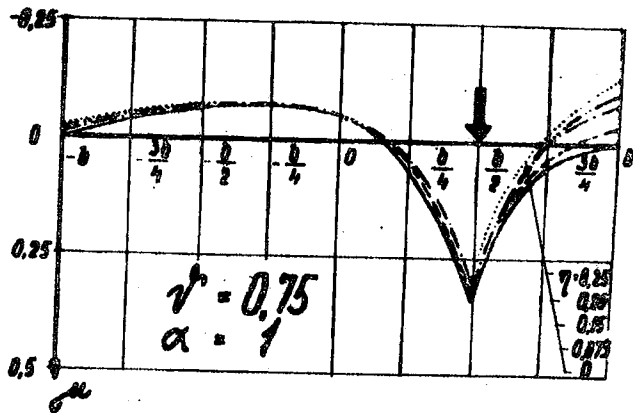
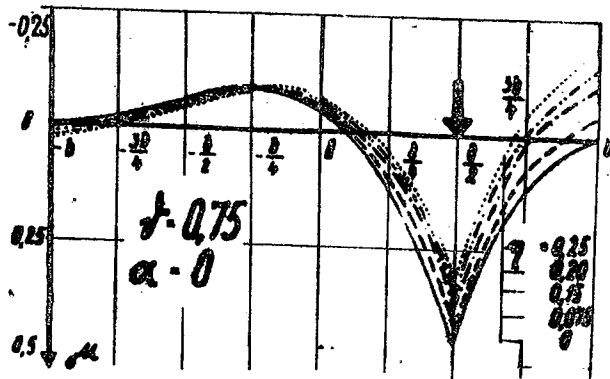
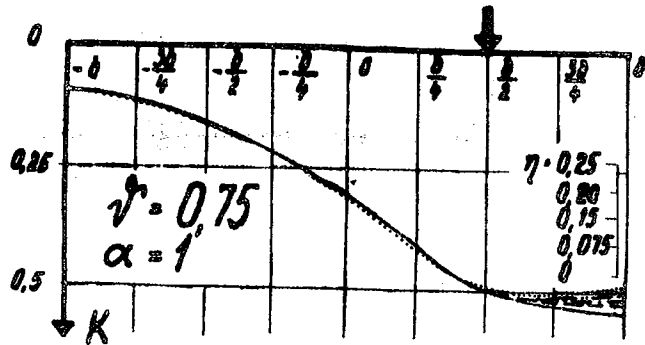
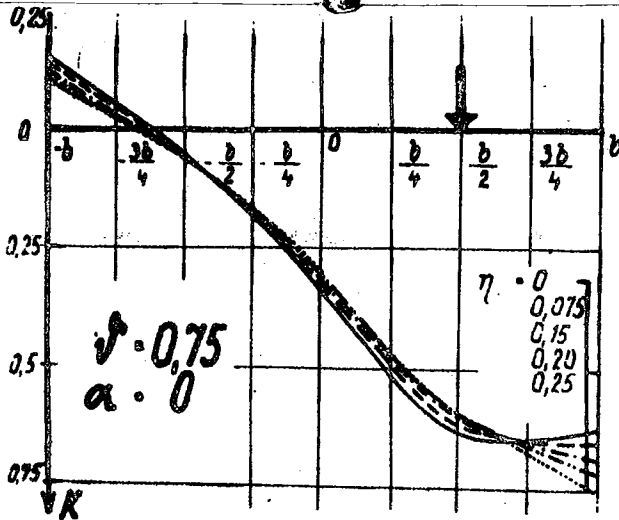


Obr. 10



Obr. 11

Obr. 12



Obc. 13

Obc. 14

nému pro stejné  $\beta$ ,  $\alpha$  a  $\eta$ , tj.  $\mathcal{K}(\beta, \alpha, \eta)_{\max}$  tj. redukovaná chyba se obdrží z

$$R_{\mathcal{K}(\beta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)_{\text{red}}} = \frac{\mathcal{K} - \mathcal{X}}{\mathcal{K}} \left| \frac{\mathcal{K}(\beta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)}{\mathcal{K}_{\max}(\beta, \alpha, \eta)} \right| \quad (31)$$

Zajímavá bude především maximální hodnota této chyby. Průměrná hodnota  $|R_x|_s$  v absolutní hodnotě označuje pak průměrnou nepřesnost výpočtu součinitele  $\mathcal{K}$  pro jistá  $\beta$ ,  $\alpha$  a  $\eta$ .

Stejným postupem lze získat názor i o ovlivnění jednotlivých vnitřních sil zavedením příčné kontrakce do výpočtu. Nechť obecná vnitřní síla je  $\gamma(\beta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)$ ; obvykle sestává ze součtu dvou členů, obsahujících bezrozměrné součinitele a je možno psát

$$\gamma(\beta, \alpha, \eta, \varphi, \psi) = C[\mathcal{K}_1(\beta, \alpha, \eta, \varphi, \psi) + k\mathcal{K}_2(\beta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)] \quad (32)$$

kde  $C$  je rozměrový součinitel příslušné vnitřní síly,  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  jsou některé ze základních bezrozměrných součinitelů,  $k$  je součinitel závislý na  $\eta$ , v některých případech i na  $\alpha$ .

Výše bylo uvedeno, že zanedbání  $\eta$  v integračních konstantách (jinými slovy v okrajových podmínkách a v základní diferenciální rovnici) projeví se v hodnotě bezrozměrných součinitelů. Nahradíme-li v předchozí rovnici správnou hodnotu  $\mathcal{K}$  součtem hodnoty  $\mathcal{X}$  a přírůstku

$$\Delta\mathcal{K} = \mathcal{K} - \mathcal{X} \quad \text{obdržíme}$$

$$Y = C \left\{ [X_1 + k X_2] + [\Delta X_1 + k \Delta X_2] \right\}, \quad (33)$$

takže můžeme psát pro hodnotu vnitřní síly  $Y$  při zanedbání parametru  $\eta$  v okrajových podmínkách

$${}^{00}Y = (X_1 + k X_2)$$

Jestliže položíme  $\eta = 0$  ve výrazu pro  $k$  v rovnici (32) obdržíme hodnotu vnitřní síly, u níž se nedbalo parametru  $\eta$  v příslušných výrazech pro ni, ale parametr  $\eta$  se uvažoval při stanovení součinitelů  $k$ , takže

$${}^{01}Y = (X_1 + k X_2)$$

Jestliže se zanedbá parametr  $\eta$  důsledně, potom

$${}^{00}Y = (X_1 + k X_2)$$

Pomocí hodnot  ${}^{00}Y$ ,  ${}^{01}Y$  a  ${}^{02}Y$  lze získat představu o chybách, které vzniknou, zanedbá-li se parametr

- v okrajových podmínkách
- ve vztahu pro vnitřní sílu
- všude.

Analogicky předchozímu lze psát pro relativní chyby

$${}^{02}R_{Y(\vartheta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)red} = \frac{Y - {}^{02}Y}{Y} \left| \frac{Y(\vartheta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)}{Y_{max}(\vartheta, \alpha, \eta)} \right|$$

$${}^{01}R_{Y(\vartheta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)red} = \frac{Y - {}^{01}Y}{Y} \left| \frac{Y(\vartheta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)}{Y_{max}(\vartheta, \alpha, \eta)} \right|$$

$${}^{00}R_{Y(\vartheta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)red} = \frac{Y - {}^{00}Y}{Y} \left| \frac{Y(\vartheta, \alpha, \eta, \varphi, \psi)}{Y_{max}(\vartheta, \alpha, \eta)} \right|$$



Tak např. podle toho pro chybové momenty v podélném směru platí

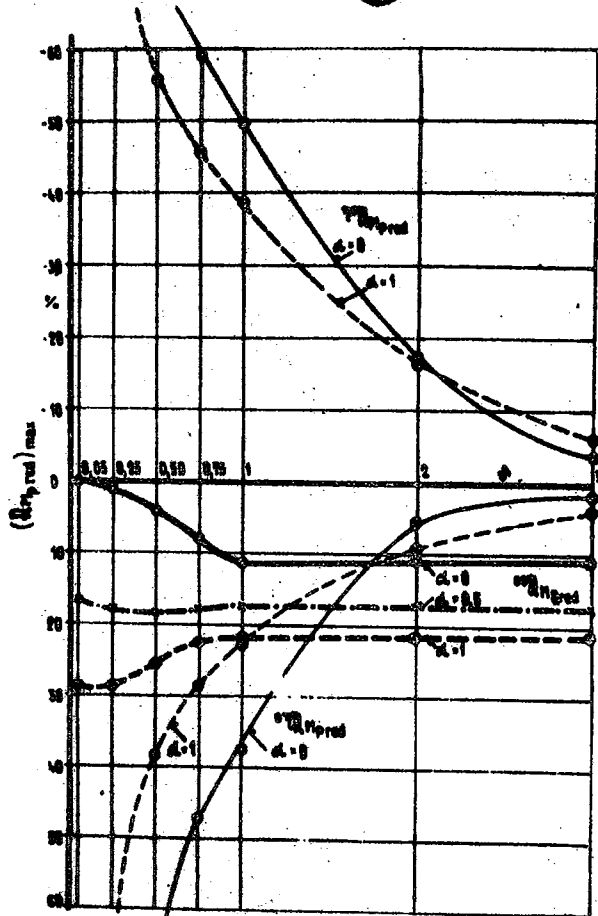
$${}^{\eta}R_{M_{yred}} = \frac{(K + \eta\mu) - (K + \eta^2\mu)}{K + \eta\mu} \cdot \left| \frac{K + \eta\mu}{(K + \eta\mu)_{max}} \right|$$

$${}^{\eta\alpha}R_{M_{yred}} = \frac{(K + \eta\mu) - K}{K + \eta\mu} \cdot \left| \frac{K + \eta\mu}{(K + \eta\mu)_{max}} \right|$$

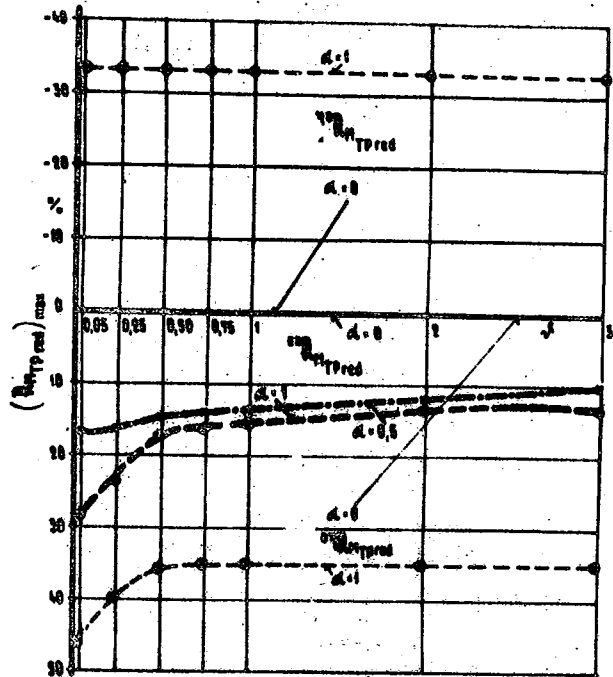
$${}^{\alpha\alpha}R_{M_{yred}} = \frac{(K + \eta\mu) - {}^{\alpha}K}{K + \eta\mu} \cdot \left| \frac{K + \eta\mu}{(K + \eta\mu)_{max}} \right|$$

Kladné znaménko chyby znamená, že zanedbáním parametru  $\eta$  vznikne chyba na nebezpečnou stranu, tj. že správná absolutní hodnota příslušné vnitřní síly je větší než při  $\eta = 0$ . Pro průměrnou nepřesnost výpočtu veličiny  $\gamma$  pro jisté  $\nu^{\beta}$ ,  $\alpha$  a  $\eta$  lze opět použít průměrnou absolutní hodnotu redukované chyby  $|R_{\gamma}|_s$ .

Pro podélný ohybový moment vznikají zanedbáním  $\eta = 0,25$  při  $\nu^{\beta} > 0,25$  maximální chyby 10 - 13% proti správné hodnotě, navíc na bezpečnou stranu bez ohledu na  $\alpha$ . Průměrná nepřesnost je malá ( $< 2\%$ ). Příčné chybové momenty jsou však značně citlivější, jak ukazuje obr. 15. Zanedbání  $\eta = 0,25$  v okrajových podmínkách způsobí maximální chybu na nebezpečnou stranu v rozsahu 80 - 10%, zanedbání  $\eta = 0,25$  v rovnici pro  $M_{\rho}$  způsobí chybu na příznivou stranu, výsledné maximální chyby jsou od 11 - 0% pro  $\alpha = 0$  resp. od 29 - 22% pro  $\alpha = 1$  na nepříznivou stranu.



Oct. 15



Oct. 16

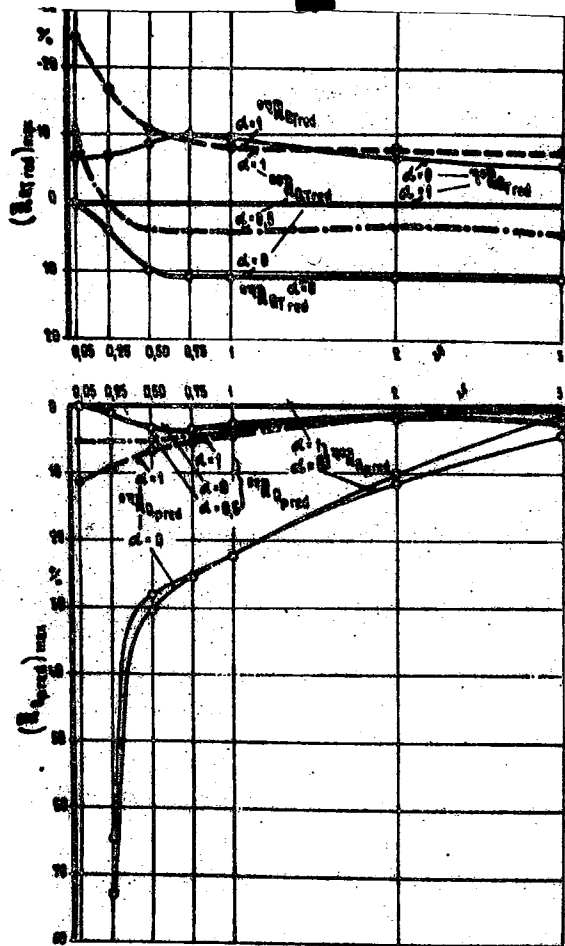
Obr. 16 dává představu o ovlivnění kroutcích momentů zanedbáním  $\eta = 0,25$ ; zanedbá-li se v okrajové podmínce, je chyba při plné torsní tuhosti ( $\alpha = 1$ ) cca 35% na nebezpečnou stranu, zanedbá-li se v rovnici  $M_{TP}$  je opět kolem 33%, avšak na bezpečnou stranu. Zanedbá-li se  $\eta$  všude, kolísá mezi 28 - 10% na nebezpečnou stranu.

Podobně je průběh chyb při stanovení posouvajících sil a reakcí vidět z obr. 17. U podélné i příčné posouvající síly je celková maximální chyba pod 10%, avšak nedbá-li se skutečné hodnoty  $\eta$  pouze v okrajových podmínkách nebo v rovnici pro posouvající sílu, jsou chyby značně větší.

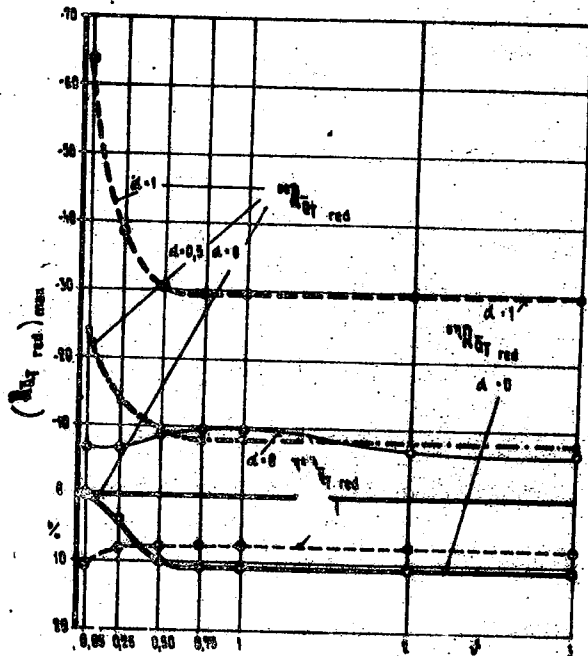
Shrneme-li výsledky studia vlivu příčné kontrakce na vnitřní síly, můžeme konstatovat, že zanedbání správné hodnoty  $\eta$  vede vesměs k uvažovatelným chybám, které znehodnocují i jinak přesný výpočet. S klesající příčnou ohybovou tuhostí (s rostoucím  $\lambda$ ) a s klesající torsní tuhostí zmenšují se i nepřesnosti vlivem zanedbání  $\eta$ . Největší chyby (mezi 10 a 30%) vznikají u  $\bar{Q}_T$ ,  $M_p$  a  $M_{TP}$ .

Rozbor rovněž ukázal, že zavedení správné hodnoty  $\eta$  pouze v některé fázi výpočtu obvykle neznamená zlepšení shody s přesnými výsledky, ale právě naopak. Není-li proto možno zavést příčnou kontrakci do počtu důsledně, je lépe ji zanedbat všude.

Důsledně zavedení správné hodnoty příčné kontrakce přinese proto proti dosavadním metodám zpřesnění řádu desítek procent; zvláště důležité je zavedení účinku příčné kontrakce u konstrukcí z novodobých materiálů, jejichž



Obr. 17a



Obr. 17b

Poissonův součinitel je vysoký (plastické hmoty, lehké slitiny, kompozita).

K dovedení popsané metody výpočtu až k možnosti praktického použití bylo nutno provést přirozeně ještě řadu vyšetřování, důkazů, rozborů a ověřování. Zaslouží např. jmenovat podrobné teoretické i experimentální studie vlivu nesoucososti středových rovin v obou ortotropních směrech, vlivu excentricity, prismatických prvků (podélníků, příčníků) vzhledem ke střednicové rovině ekvivalentní desky, studie o vlivu náhrady skutečné konstrukce ekvivalentní deskou a určení podmínek přechodu, nalezení velikosti chyb; vznikajících důsledkem "rozmazení" podélníků a příčníků atd. Tyto problémy jsou podrobně popsány např. v /2, 3, 8, 12/.

#### 4. Výsledky práce s uvedením nových poznatků

Byla odvozena nová teorie bezrozměrných součinitelů pro analýzu plošných tvarově ortotropních konstrukcí, jež využívá principů dřívější metody autora a přináší významné zpřesnění zavedením dosud běžně zanedbávané příčné kontrakce materiálů, z nichž je konstrukce zhotovena.

Odvozená teorie umožňuje výpočet pro každou jednotlivou konstrukci pomocí samočinného počítače, avšak především umožňuje vypočítat a tabelovat bezrozměrné součinitele předem a pomocí nich analyzovat každou konstrukci mostního typu s běžnými inženýrskými pomůckami v krátkém čase. Metoda výpočtu přináší významnou racionalisaci práce projektanta-statika, dovoluje prošetřit řadu variant uspořádání i rozměrů a volbu optimální konstrukce.

Teorie bezrozměrných součinitelů umožňuje provést výpočet s libovolnou přesností pro každé zatížení. Jednoduchým způsobem lze metodu použít i pro konstrukce s odlišnými okrajovými tuhostmi, pro konstrukce spojitě, proměnného průřezu a předpjaté.

Přechod od skutečné k ekvivalentní konstrukci byl řešen podle skutečné spolupráce jednotlivých prvků zavedením všech vlivů, včetně příčné kontrakce všech částí, do průřezových charakteristik (tuhostí) a bylo dosaženo výstižné konverze.

Byla provedena podrobná analýza vlivu základních předpokladů výpočtu, jako je "rozmazání" podélníků a příčníků, na přesnost obdržенých výsledků; bylo prokázáno, že i v extrémních případech zůstávají chybami proti "přesnému" řešení v mezích, tolerovaných obvykle v technických výpočtech.

Podrobný rozbor vlivu příčné kontrakce na vnitřní síly ukázal, že zanedbáním správné hodnoty  $\nu$  vede vesměs k uvažovatelným chybám řádu desítek procent. Při klesající ohybové a torsní tuhosti se chyby zanedbáním příčné kontrakce zmenšují.

Zavedení správné hodnoty příčné kontrakce pouze v některé fázi výpočtu (např. v okrajových podmínkách, v základní rovnici, ve vztazích pro vnitřní síly) neznamena obvykle zlepšení shody s přesnými výsledky, ale právě naopak. Tím bylo prokázáno, že občas užívaná "zprecnění" zavedením vlivu příčné kontrakce jen v některé části výpočtu (např. do vztahů pro vnitřní síly) jsou zcela nevhodná.

## 5. Závěry pro praxi a pro další rozvoj vědní disciplíny

---

Byla poskytnuta výstižná a účinná metoda výpočtu mostních tvarově ortotropních plošných konstrukcí, jež kromě významného zpřesnění výsledků a tím návrhu ekonomických konstrukcí umožňuje i racionalisaci práce projektanta.

Odvozenou metodu lze vzhledem k její universálnosti rozšířit i pro systémy s jinými okrajovými podmínkami, např. pro systémy uložené po celém obvodu (stropní, střešní konstrukce), stejně jako např. pro šikmé mostní systémy a j.

Bylo též umožněno stanovit rozsah nepřesností desavadních metod výpočtu, nedbajících příčné kontrakce a stanovit podmínky a oblasti, ve kterých lze zjednodušení přijmout.

## 6. Seznam nejdůležitějších publikovaných prací disertanta, majících vztah ke zkoumané problematice

---

- /1/ Baresš,R. : Výpočet roštů s uvažováním kroucení, SNTL, Praha, 1963
- /2/ Baresš,R. : Interaction transversale des constructions à poutres solidaires d'une dalle, Acta Technica ČSAV, 1959, No.4 a 5, 1960, No.2
- /3/ Baresš,R. , Machan,P. : Přesný výpočet tvarově ortotropních desek, Rozpravy ČSAV, TV, No.4, 1962
- /4/ Baresš,R. : Compléments à méthode Guyon-Massonnet de calcul des ponts à poutres multiples, Ann. des Travaux Publics de Belgique, 1965 No.1,2

- /5/ Bareš, R. : Some Supplements to the Guyon-Massonnet Method of Computing Beam Grillagees, Acta Technica ČSAV, 1964, No.5.
- /6/ Bareš, R. : Příspěvek k metodě výpočtu rážů podle Guyona-Massonneta, Stavebnický časopis, 1962, No.3
- /7/ Bareš, R. , Massonnet, Ch. : Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon la méthode Guyon-Massonnet-Bareš, BUNGD, Paris, 1966, angl. Crosby-Loockwood, 1968, London, Fred Ungar, 1968, New York
- /8/ Bareš, R. , Berka, L. : General Theory of Composite Orthotropic Plates, ÚTAM-ČSAV, 1963
- /9/ Bareš, R.A. : Method of Dimensionless Coefficients for Analysis of Structurally Orthotropic Plane Structures, Acta Technica ČSAV, 1973, No.5,6.
- /10/ Bareš, R.A. : Analysis of Structurally Orthotropic Bridge Deck Systems with Stiffened Outer Edges, Acta Technica ČSAV, 1974, No.2
- /11/ Bareš, R.A. : Methode des coefficients sans dimensions pour l'analyse des constructions planes presentant l'orthotropie de forme, Annales des Travaux Publics de Belgique, 1973-1974, No.6.
- /12/ Bareš, R.A. : Precision de la methode des coefficients de repartition et grandeur des erreurs dans l'analyse des constructions planes presentant l'orthotropie de forme, Annales des Travaux Publics de Belgique, 1973-1974, No.6.



- /13/ Bares, R.A.: Bestimmung der Biege- und Torsionssteifigkeit von Flächentragwerken unter Berücksichtigung der Querkontraktion, VDI-Z 116 (1974), Nr. 10
- /14/ Bares, R.A.: Einfluss der Querkontraktion bei der Analyse formorthotroper Flächentragwerke, Strasse Brücke Tunnel 6/1974.
- /15/ Bares, R.A.: Analysis of Structurally Orthotropic Plane Systems, Teorijska i primenjena MEHANIKA, 1, 1975,
- /16/ Bares, R.A.: Functions of Interpolation in the Analysis of Structurally Orthotropic Plane Systems by the Method of Dimensionless Coefficients, Acta Technica CSAV, 1975, No. 3,
- /17/ Bares, R.A.: Berechnung formorthotroper Flächentragwerke, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomis 82, 1976, No. 1-2,
- /18/ Bares, R.A.: Berechnungstabellen für Platten und Wandscheiben (Tables for the Analysis of Plates, Slabs and Diaphragms) Bauverlag, 1969, 1971, 1977, Wiesbaden, franc. Dunod, 1969, Paříž, španěl. Gustavo Gili, 1970, Barcelona

Na práce disertanta v oboru plošných konstrukcí uvedených např. pod č. /7, 18/ navázala nebo jeho výsledky převzala řada zahraničních autorů, z nichž bylo zaznamenáno:

- Prof. B. Aalami (University of Technology Teheran, Iran) v knize Large Deflection Elastic Behaviour of Plates, 1974

- Dr. Ing. O. F. Theimer, VDI, München, NSR v publikaci Plan Nr. 7319, 1973

- Ch.T. Hoard, Standford University, California  
v publikaci Stress-Analysis-Anulus under Pressure,  
1972
- Dr.Ing. J. Fricke, Viersen-Dülhen, NSR v publikaci  
Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatte. Vergleich  
bisheriger Rechenergebnisse, 1970
- M. & A. Reinbert, AICP, Paris, Francie v publikaci  
P.J.5 Plancher - dalles, 1969
- G. Eisenbirgler, Zaid Mountasseb, Universite Karlsruhe,  
NSR v publikaci Dreiseitig gelagerte isotrope Rechteck-  
platten mit linear verenderlicher Dicke, 1974
- J. Hossain, J.Str.Div.Proc. of ASCE, vol. 101, No.ST 1,  
1975
- Komise ASCE, J. Str.Div. Proc. of ASCE, vol. 101, No.ST 5,  
1975
- Prof. Szilard - Theory and Analysis of Plates, Prantice  
Hall, New Jersey, 1975
- Prof. Fricke - Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatte,  
Ernst-Verlag, NSR, 1975.

## 7. Resumé

---

### АНАЛИЗ КОНСТРУКЦИЙ ОРТОТРОПНОГО СФОРМИРОВАНИЯ МЕТ. ДСМ БЕЗРАЗМЕРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ.

---

Была введена теория безразмерных коэффициентов для анализа плоскостных конструкций ортотропного формирования, которая использует принципы нового метода, предложенного уже ранее автором и приносит весомое уточнение расчета путем учета поперечного сжатия материала, из которого изготовлена данная конструкция, которым до сего времени обычно пренебрегалось.

Нововведенная теория дает возможность расчета каждой отдельной конструкции при помощи ЭВМ (вычислительной машины), однако прежде всего позволяет исчислить и наглядно показать в форме таблицы уже заранее безразмерные коэффициенты и при их помощи анализировать каждую конструкцию типа моста с применением обычных инженерских пособий в течение короткого времени. Метод расчета представляет собой таким образом важную рационализацию работы проектировщика-статика, дает возможность обследовать ряд вариантов как самой схемы, так и размеров конструкции равно как и выбор оптимальной конструкции.

Теория безразмерных коэффициентов дает возможность исполнить расчет с любой точностью для каждой нагрузки. Метод можно использовать и для конструкций с отличающимися граничными жесткостями, для конструкций непрерывных, переменного сечения и предварительно напряженных.

Переход от действительной к эквивалентной конструкции был решен согласно действительному взаимодействию отдельных элементов путем учета влияния, включая поперечное сжатие всех составных частей в характеристиках сечений (жесткости) и была достигнута впечатляющая конверсия.

Был произведен подробный анализ влияния всех основных предположений расчета, как напр. "размывание" продольных несущих балок (прогонов) и поперечный, на точность полученных результатов; далее было доказано, что и в крайних случаях остаются отклонения от "точного" решения в пределах допустимых в технических расчетах. Подробный анализ влияния поперечного сжатия на внутренние силы показал, что пренебрежение действительным правильным значением величины  $\eta$  приводит во всех случаях к значимым погрешностям порядка десятков. При снижающейся жесткости в изгибе и при скручивании погрешности, вызываемые пренебрежением поперечного сжатия уменьшаются.

Поскольку учет правильной величины поперечного сжатия  $\eta$  вводится лишь в некоторой фазе расчета (напр. в граничных условиях, в основном уравнении, в соотношениях для внутренних сил), то это отнюдь не обозначает улучшение согласия с точными результатами, а скорее наоборот. Тем было доказано, что иногда применяемое "уточнение" введением влияния поперечного сжатия только лишь в некоторой части расчета (напр. в соотношениях внутренних сил) является совершенно непригодным.

**ANALYSIS OF SHAPE-ORTHOTROPIC STRUCTURES BY THE  
DIMENSIONLESS COEFFICIENT METHOD**

---

A new theory of dimensionless coefficients was deduced for the analysis of plane, shape-orthotropic structures utilizing the principles of a method formerly deduced by the author and resulting in a considerable improvement of the accuracy of calculation due to the introduction of the hitherto neglected transverse contraction of structural materials.

The deduced theory enables the calculation of every individual structure to be made by means of computers. In the first place, however, it enables the calculation and tabulation of dimensionless coefficients in advance and an analysis of every bridge-type structure by means of standard engineering aids in a very short period.

The method enables considerable rationalization of work of structural engineers, enables the investigation of a number of variants of design and dimensions and the selection of an optimum design.

The theory of dimensionless coefficients enables the calculations to be carried out with any accuracy required for every load. The method may be used very simply also for the structures with different boundary rigidities, for continuous structures, for variable cross section structures and for prestressed structures.

The transition from the actual to the respective equivalent structure was solved in accordance with the actual cooperation of the individual elements by the introduction of all influences, incl. the transverse contraction of all parts, into cross section characteristics (rigidities) and a very characteristic conversion was achieved.

A detailed analysis was carried out of the influence of the principal assumptions of the design, such as the "blurring" of longitudinal and transverse beams, on the accuracy of the results obtained; it was proved that even in extreme cases the errors (in comparison with the "accurate" solution) remained within the limits usually tolerated in technical calculations.

A detailed analysis of the influence of transverse contraction on internal forces has shown that the neglect of the correct value of transverse contraction  $\eta$  results generally in accountable errors of the orders of tens of per cent. With the reduced flexural and torsional rigidity the errors due to the neglect of transverse contraction are reduced, too.

The introduction of the quantity  $\eta$  in a certain phase of calculation only (e.g. in boundary conditions, in the basic equation, in the relations for internal forces) does not usually mean an improvement of the agreement with accurate results; on the contrary, the agreement is lower. This has proved that the introduction of the influence of the transverse contraction into a certain part of the calculation only, which is used sometimes (e.g. in the relations for internal forces, etc.) is entirely unsuitable.